

И. Д. Дорогая, А. А. Зайцев

**МЕТОД ФУРЬЕ, СИММЕТРИИ
И ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ**

Дан вывод выражений для функции Грина задачи Дирихле для полосы и прямоугольника тремя способами: методом Фурье и методами, использующими факторизованный вариант принципа симметрии и конформные отображения.

The article offers the deduction of expressions for the Greene function of the Dirichlet problem for a strip and a rectangle by means of three methods: the Fourier method and methods involving the factorized variant of the symmetry principle and conform maps.

Ключевые слова: факторизованный принцип симметрии, метод Фурье, задача Дирихле, функция Грина, мероморфная функция.

Keywords: factorized symmetry principle, the Fourier method, the Greene function, meromorphic function.

Введение

Решение многих физических задач, особенно задач электростатики, гидродинамики, теории фильтрации грунтовых вод, сводится к построению функции Грина задачи Дирихле. В двумерном случае этому способствуют методы теории функции комплексных переменных [1–3], а также специальные приемы, использующие соображения симметрии. Многочисленные примеры построения функции Грина задачи Дирихле с помощью теоремы о прямой и окружности приведены в [4]. Однако для решения более сложных задач требуется использовать методы и факты теории групп преобразований в сочетании с теорией конформных отображений. В данной статье мы покажем эффективность этого подхода на примерах классических краевых задач Дирихле для полосы и прямоугольника. Кроме того, будет показана связь предлагаемого подхода с традиционным методом, используемым в математической физике, — методом Фурье.

Факторизованный вариант принципа симметрии

В этой работе плоскость \mathbf{R}^2 будет отождествляться с комплексной плоскостью \mathbf{C} . Известно [1], что функция Грина задачи Дирихле для области $D \in \mathbf{C}$ допускает представление

$$g(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln|h(z, z_0)|, \quad (1)$$

где $h(z, z_0)$ — аналитическая функция в области D , имеет там простой ноль в точке z_0 , $h(z, z_0) = 0$, $h_z(z, z_0) \neq 0$, и на границе этой области удовлетворяет соотношению

$$|h(z, z_0)| = 1, \quad z \in \partial D. \quad (2)$$

Перечисленными условиями функция $h(z, z_0)$ определена однозначно с точностью до множителя $\exp(i\alpha)$, где α — произвольное действительное число.

Допустим, что граница области содержит часть l некоторой прямой (l может быть отрезком, лучом и даже всей прямой), $l \in \partial D$. Пусть s — отражение от l . Справедлива

Теорема 1. *Функция $h(z, z_0)$ единственным образом продолжается через l в симметричную область sD до мероморфной функции, имеющей простой полюс в точке sz_0 , при этом для всех точек $z \in D \cup l \cup sD$ выполнено соотношение*

$$h(z, z_0)\overline{h(sz, z_0)} = 1. \quad (3)$$

Соотношение (3) равносильно граничному условию (2), но при решении конкретных задач проверить его легче.

Утверждение теоремы аналогично формулировке известного принципа симметрии Римана-Шварца в теории функции комплексной переменной [1–3], поэтому назовем его факторизованным вариантом принципа симметрии.

Кроме принципа симметрии полезна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $H(z)$ — конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$. Тогда*

$$h(z, z_0) = \frac{H(z) - H(z_0)}{H(z) - \overline{H(z_0)}}. \quad (4)$$

Функция Грина задачи Дирихле для полосы

Пусть область D есть горизонтальная полоса $0 < \text{Im } z < b$ (рис. 1). Обозначим отражения от ее нижней и верхней границ символами s_1 и s_2 . Тогда $s_1 z = \bar{z}$, $s_2 z = \bar{z} + 2bi$. Группа G , порожденная этими отражениями, будет диэдральной и содержит нормальную подгруппу H индекса 2, которая циклическая и порождена сдвигом $T = s_1 s_2$, $Tz = z + 2bi$. Ее единственный смежный класс имеет своими представителями отражения s_1 и s_2 и может быть записан HS_1 .

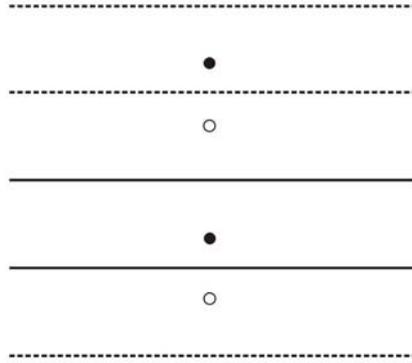


Рис. 1. Нули и полюсы функции $h(z, z_0)$ в случае полосы

Продолжение функции $h(z, z_0)$ в область $D \cup I \cup sD$ назовем продолжением с помощью симметрии s . Продолжая $h(z, z_0)$ через границы полосы с помощью отражений s_1, s_2 и других преобразований группы G , получим мероморфную функцию с простыми нулями и полюсами. Ее нули получаются действием подгруппы H на точку z_0 , и их координаты имеют вид $z_0 + 2nbi$, $n \in \mathbf{Z}$. Полюсы получаются действием смежного класса HS_1 на эту же точку и для их координат будет иметь $\overline{z_0} + 2nbi$, $n \in \mathbf{Z}$. Одной из мероморфной функции, обладающей данными нулями и полюсами, будет функция

$$h(z, z_0) = \frac{\exp(\pi(z - z_0)/b) - 1}{\exp(\pi(\overline{z} - \overline{z_0})/b) - 1}. \quad (5)$$

Несложно проверить, что $h(z, z_0)\overline{h(s_k z)} = 1, k = 1, 2$, то есть функция $h(z, z_0)$ подчиняется факторизованному принципу симметрии.

Покажем, что стандартный метод Фурье также приводит к формулам (1) и (5). Согласно этому методу функцию Грина следует искать в виде ряда Фурье

$$g(z, z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x, z_0) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad (6)$$

где $g_n(x, z_0)$ есть решение уравнения

$$g_{n,xx} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2} g_n = \frac{2}{b} \sin\left(\frac{\pi y_0}{b}\right) \delta(x - x_0).$$

Решив его, получим $g_n = -\frac{1}{\pi i} \sin\left(\frac{\pi y_0}{b}\right) \exp\left(-\frac{\pi n}{b}|x - x_0|\right)$. Подставив это выражение в ряд (6) и просуммировав с помощью известного раз-

ложения $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, получаем представление (1), в котором для функции $h(z, z_0)$ имеет место формула (5).

К формуле (5) можно прийти также с помощью теоремы 2. Именно функция $w = H(z) = \exp(\pi z/b)$ осуществляет конформное отображение рассматриваемой полосы на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$. Подставляя ее в формулу (4), после небольшого упрощения получаем формулу (5).

Функция Грина задачи Дирихле для прямоугольника

Пусть областью D является прямоугольник $0 < x < a, 0 < y < b$ (рис. 2).

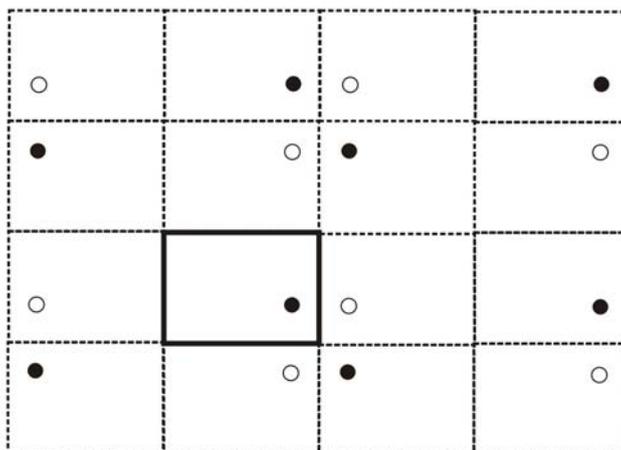


Рис. 2. Нули и полюсы функции $h(z, z_0)$ в случае прямоугольника

Группа G , порожденная отражениями от четырех сторон прямоугольника, содержит нормальную подгруппу H индекса 2, порожденную симметрией $z \rightarrow -z$ и сдвигами $z \rightarrow z + 2a$, $z \rightarrow z + 2bi$. Отсюда следует, что функция $h(z, z_0)$ продолжается через стороны прямоугольника посредством группы G до мероморфной функции, которая имеет простые нули в точках $z = \pm z_0 + 2(ma + nbi)$ и простые полюсы в точках $z = \overline{\pm z_0} + 2(ma + nbi)$. Примером такой функции является

$$h(z, z_0) = \frac{\theta_1\left(\frac{z-z_0}{2a} \middle| i\frac{b}{a}\right) \theta_1\left(\frac{z+z_0}{2a} \middle| i\frac{b}{a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\overline{z_0}}{2a} \middle| i\frac{b}{a}\right) \theta_1\left(\frac{z+\overline{z_0}}{2a} \middle| i\frac{b}{a}\right)}. \quad (7)$$

Несложно проверить, что соотношения $h(z, z_0)\overline{h(s_k z, z_0)} = 1$, где s_k , $k = 1, 2, 3, 4$, — отражения от сторон прямоугольника, выполняются. Следовательно, формула (7) совместно с (1) дает функцию Грина в данном случае.

Отметим, что к представлению (7) можно прийти, используя классический метод Фурье. С помощью этого метода для функции Грина сначала получается ряд Фурье

$$g(z, z_0) = -\frac{4ab}{\pi^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi mx_0}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi y_0}{b}\right)}{m^2 b^2 + n^2 a^2}.$$

Его можно записать следующим образом:

$$g(z, z_0) = g(z - z_0) + g(z + z_0) - g(z - \overline{z_0}) - g(z + \overline{z_0}),$$

где

$$g_0(z) = -\frac{ab}{\pi^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{m^2 b^2 + n^2 a^2} - g_{00}(x) \right);$$

функция $g_{00}(x)$ будет определена позже. Суммируя ряд по n с помощью формулы

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \frac{\operatorname{ch}(a(x - \pi))}{\operatorname{sh}(\pi a)}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

и полагая $g_{00}(x) = (3x^2 - 6ax + 2a^2) / 24ab$, получаем

$$g_0(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi m(y-b)}{a}\right)}{n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi mb}{a}\right)} \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right).$$

Данный ряд выражается через тета-функцию Якоби. После выполнения соответствующей процедуры вновь приходим к формуле (7).

В работе [5] показано, что функция

$$H(z) = -i \frac{\theta_1\left(\frac{z-c}{2a} \middle| \tau\right) - \theta_1\left(\frac{z-c-a}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{z-c}{2a} \middle| \tau\right) + \theta_1\left(\frac{z-c-a}{2a} \middle| \tau\right)}, \quad c = (a+bi)/2, \quad \tau = c/a,$$

осуществляет конформное отображение рассматриваемого прямоугольника на верхнюю полуплоскость. Используя теорему 2, получаем новое представление для функции $h(z, z_0)$, равносильное представлению (7).

Список литературы

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М., 1973.

2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., 1999.

3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М., 1969.

4. Зайцев А.А., Шпилевой А.Я. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах. Калининград, 2001.

5. Волянская И.К., Дорогая И.Д., Зайцев А.А., Шпилевой А.Я. Новое представление для конформного отображения прямоугольника на верхнюю полуплоскость и его применение для решения задач теории фильтрации // Труды международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Орел, 2008. Вып. 6. С. 124 – 128.

Об авторах

А.А. Зайцев – канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта.

И.Д. Дорогая – студ., РГУ им. И. Канта.

Authors

A. Zaytsev – Dr., IKSUR.

I. Dorogaya – student, IKSUR.